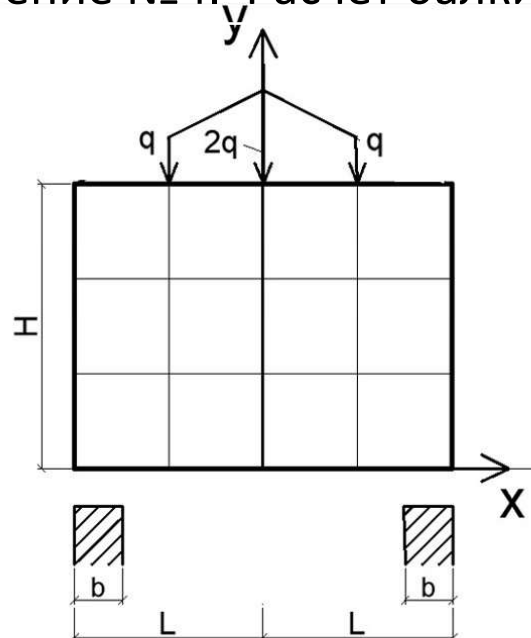
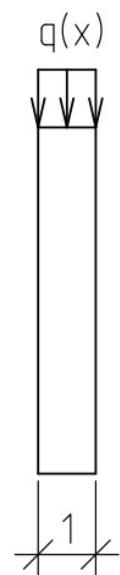
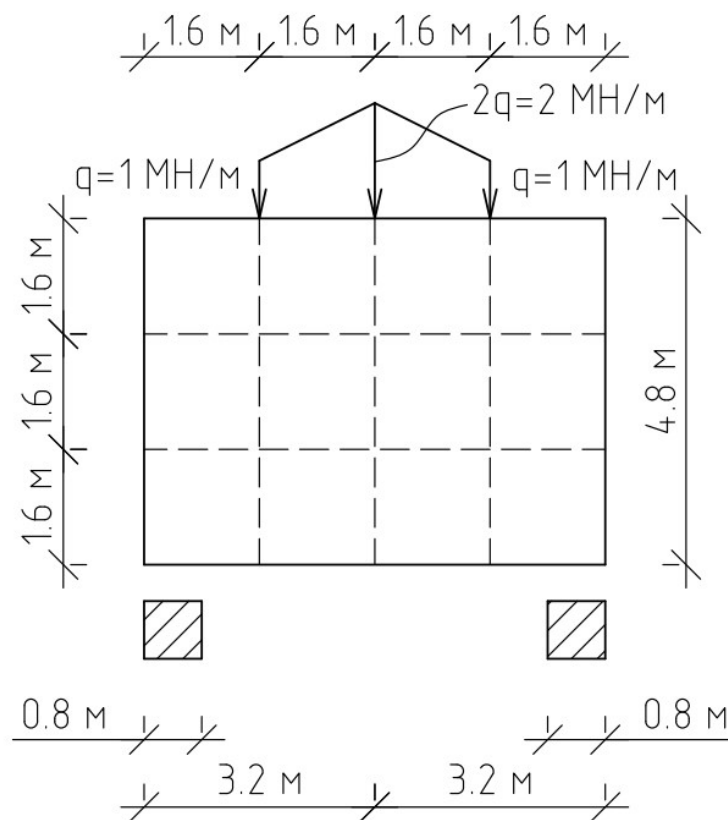


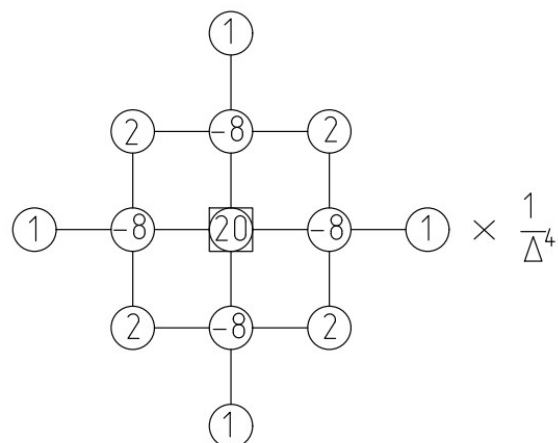
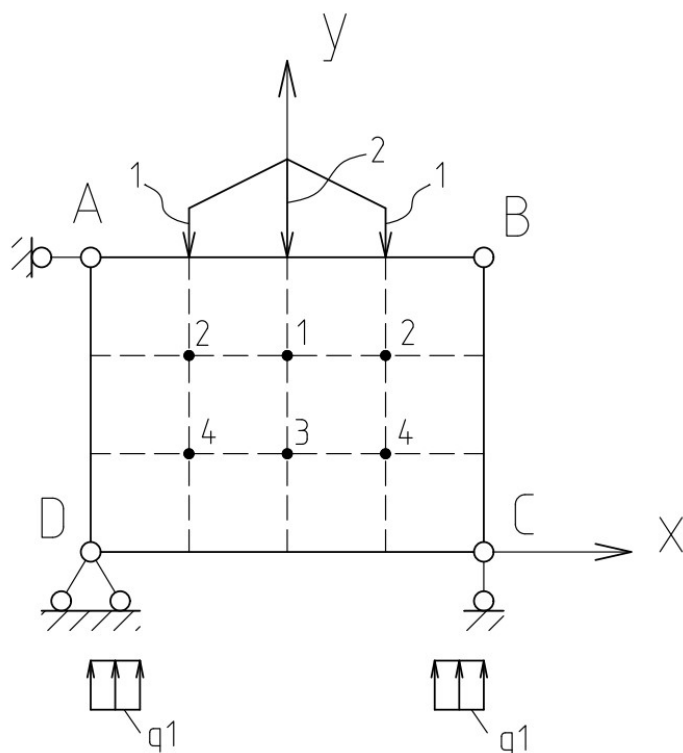
Упражнение №4. Расчёт балки-стенки.



$$L=2\Delta, \quad H=3\Delta, \quad b=\Delta/2, \quad \Delta=1.6\text{ м}, \quad q=1\text{ МН/м}$$



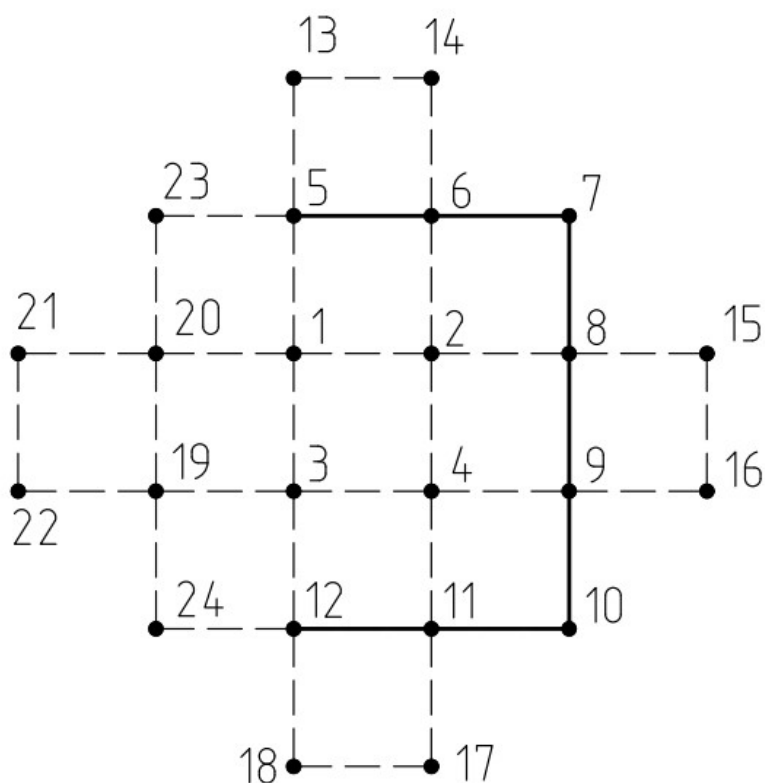
					ВГТУ	СУЗ-211	Лист
Изм.	Лист	№ док.	Подп.	Дата			1



1. Бигармоническое уравнение

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$$

$$20 \cdot \varphi_{ij} - 8 \cdot (\varphi_{i-1j} + \varphi_{i+1j} + \varphi_{ij-1} + \varphi_{ij+1}) + 2 \cdot (\varphi_{i-1j-1} + \varphi_{i+1j-1} + \varphi_{i-1j+1} + \varphi_{i+1j+1}) + \varphi_{i-2j} + \varphi_{i+2j} + \varphi_{ij-2} + \varphi_{ij+2} = 0$$

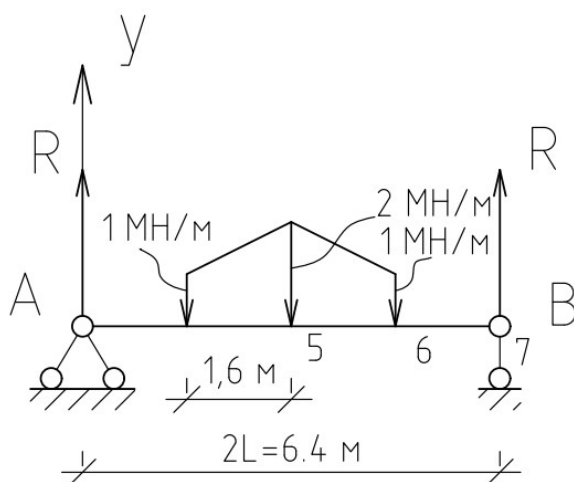


$$(1) \begin{cases} 20\varphi_1 - 8 \cdot (\varphi_{20} + \varphi_2 + \varphi_5 + \varphi_3) + 2 \cdot (\varphi_{23} + \varphi_6 + \varphi_4 + \varphi_{19}) + \varphi_{12} + \varphi_{13} + \varphi_{21} + \varphi_8 = 0; \\ 20\varphi_2 - 8 \cdot (\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_4 + \varphi_1) + 2 \cdot (\varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_3) + \varphi_{11} + \varphi_{14} + \varphi_{20} + \varphi_{15} = 0; \\ 20\varphi_3 - 8 \cdot (\varphi_1 + \varphi_4 + \varphi_{12} + \varphi_{19}) + 2 \cdot (\varphi_2 + \varphi_{11} + \varphi_{24} + \varphi_{20}) + \varphi_5 + \varphi_9 + \varphi_{18} + \varphi_{22} = 0; \\ 20\varphi_4 - 8 \cdot (\varphi_2 + \varphi_9 + \varphi_{11} + \varphi_3) + 2 \cdot (\varphi_1 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}) + \varphi_6 + \varphi_{16} + \varphi_{17} + \varphi_{19} = 0. \end{cases}$$

Исключим узлы на контуре и законтурные узлы.

2. Построим эпюры M и N в стержнях соответствующей рамы.

Стержень АВ



$$\sum y = 0; 2R - (2 + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \Delta = 0$$

$$R = \frac{3}{2} \cdot \Delta = \frac{3}{2} \cdot 1.6 = 2.4 \text{ МН}$$

$$\sum m_k = 0;$$

$$M - 2.4 \cdot 1.6 = 0$$

$$M_6 = 3.84 \text{ МН} \cdot \text{м}$$

$$\sum m_c = 0; M - 2.4 \cdot 3.2 + 1 \cdot 1.6 \cdot \frac{1.6}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1.6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1.6 = 0$$

$$M_5 = 5.973 \text{ МН} \cdot \text{м}$$

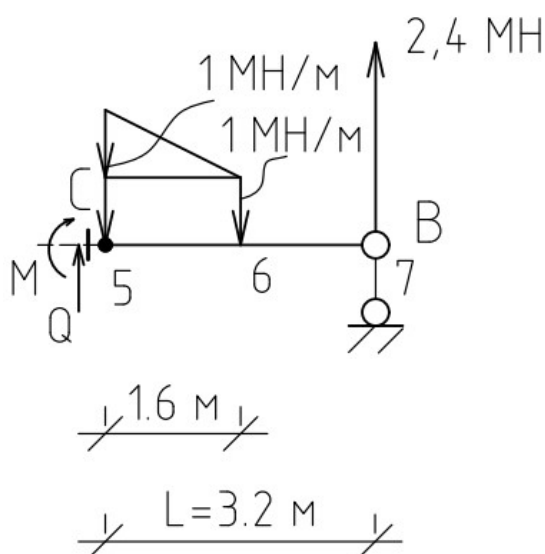
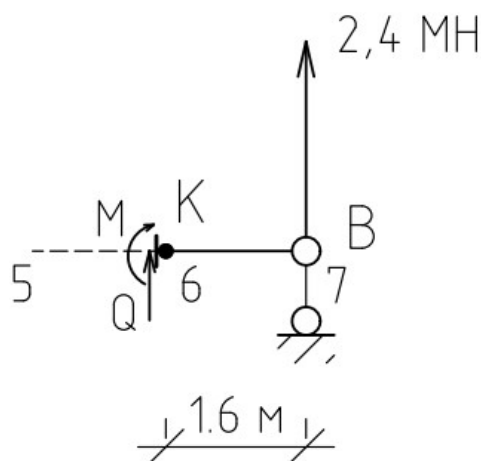
$$M_7 = 0; N_5 = N_6 = N_7 = 0$$

$$\text{На контуре } \varphi = M; \frac{\partial \varphi}{\partial n} = N$$

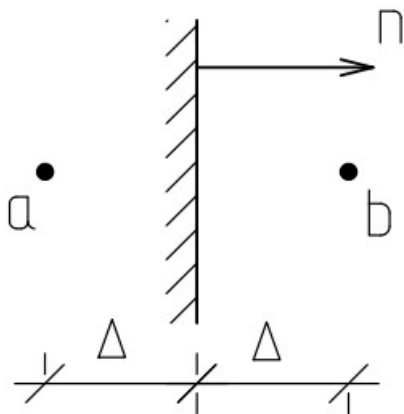
$$\varphi_5 = M_5 = 5.973 \text{ МН} \cdot \text{м};$$

$$\varphi_6 = M_6 = 3.84 \text{ МН} \cdot \text{м};$$

$$\varphi_7 = M_7 = 0 \text{ МН} \cdot \text{м}$$



					ВГТУ	СУЗ-211	Лист
Изм.	Лист	№ док.	Подп.	Дата			3

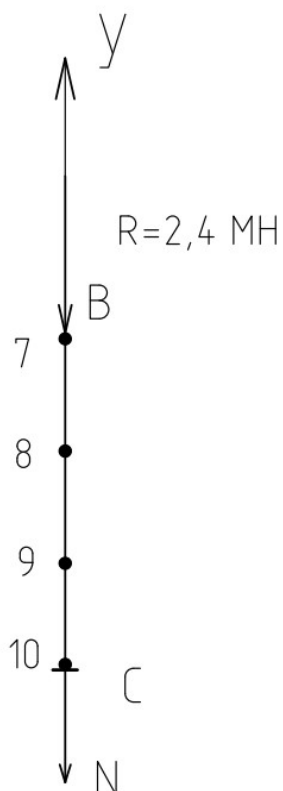


$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{2\Delta} = N; \quad \varphi_b = \varphi_a + 2 \cdot \Delta \cdot N$$

$$\text{т. 5: } \varphi_{13} = \varphi_1 + 2 \cdot \Delta \cdot 0; \quad \varphi_{13} = \varphi_1;$$

$$\text{т. 6: } \varphi_{14} = \varphi_2 + 2 \cdot \Delta \cdot 0; \quad \varphi_{14} = \varphi_2.$$

Стержень ВС



$$\sum y = 0; \quad -R - N = 0; \quad N = -R = -2.4 \text{ МН}$$

$$N_8 = N_9 = -2.4 \text{ МН}$$

$$\varphi_{15} = \varphi_2 + 2 \cdot \Delta \cdot N_8 = \varphi_2 - 2 \cdot 1.6 \cdot 2.4 = \varphi_2 - 7.68$$

$$\varphi_{16} = \varphi_4 - 7.68$$

$$M_8 = M_9 = 0; \quad \varphi_8 = \varphi_9 = 0$$

Стержень CD

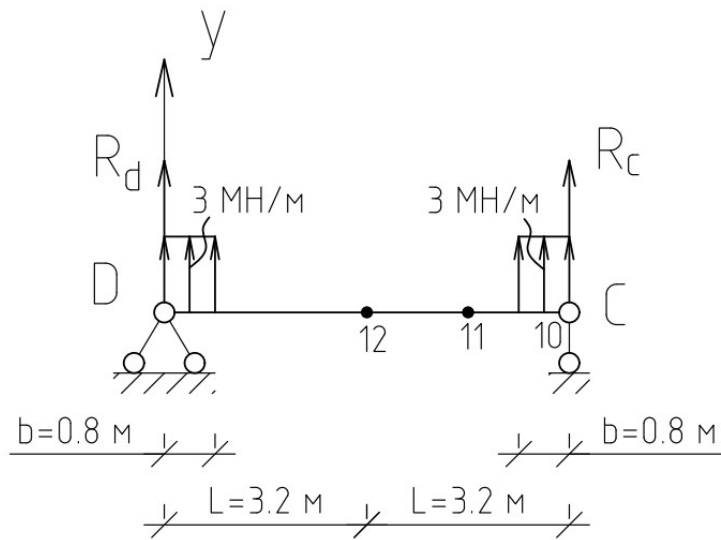
Найдём q_1 из уравнения равновесия балки стенки:

$$\sum y = 0; \quad 2 \cdot q_1 \cdot b - (2 + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \Delta = 0$$

$$q_1 \cdot b = q_1 \cdot \frac{\Delta}{2} = (2 + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta$$

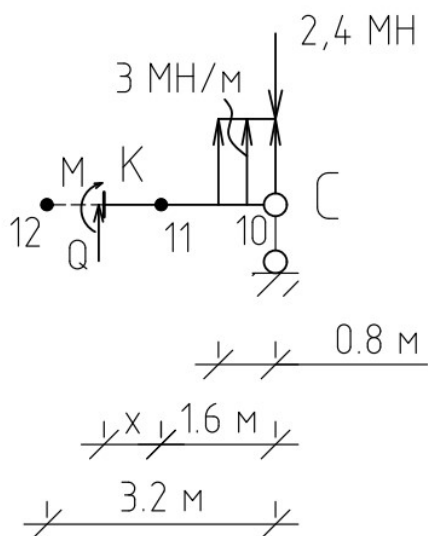
$$q_1 = 3 \frac{\text{МН}}{\text{м}}$$

					ВГТУ	СУЗ-211	Лист
Изм.	Лист	№ док.	Подп.	Дата			4



$$\sum y = 0; 2R + 2 \cdot 3 \cdot b = 0$$

$$R_C = R_D = -3 \cdot 0.8 = -2.4 \text{ MH}$$



$$0 \leq x \leq 3.2 - 1.6 = 1.6 \text{ м}$$

$$\sum m_k = 0;$$

$$M + 2.4 \cdot (1.6 + x) - 3 \cdot 0.8 \cdot (1.2 + x) = 0$$

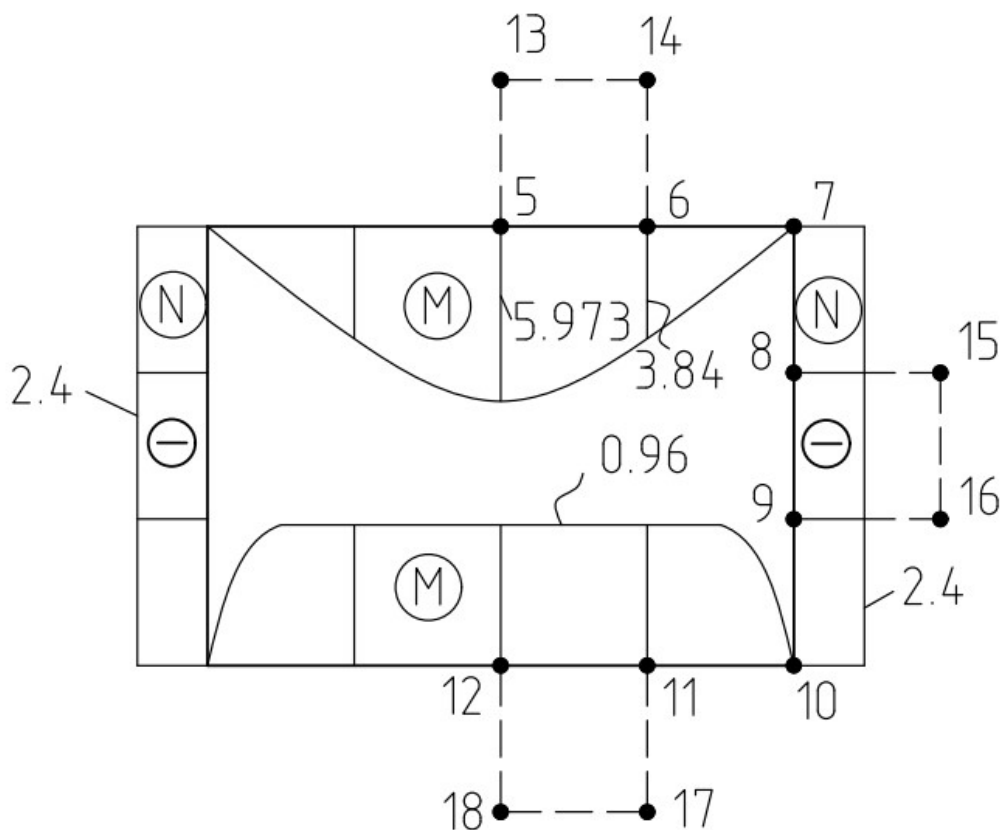
$$M = -2.4 \cdot (1.6 + x) + 3 \cdot 0.8 \cdot (1.2 + x)$$

$$M_{11} = -0.96 \text{ MH} \cdot \text{м};$$

$$M_{12} = -0.96 \text{ MH} \cdot \text{м};$$

$$M_{10} = 0.$$

$$N_{12} = N_{11} = N_{10} = 0$$



					ВГТУ	СУЗ-211	Лист
Изм.	Лист	№ док.	Подп.	Дата			5

На контуре: если ординаты эпюры M , отложенные со стороны растянутого волокна, направлены во внутрь контура, то $\varphi = +M$.

$N > 0$, если соответствует растяжению.

Имеем, таким образом:

$$\varphi_5 = 5.973; \varphi_6 = 3.84; \varphi_7 = 0; \varphi_8 = 0; \varphi_9 = 0; \varphi_{10} = 0; \varphi_{11} = 0.96; \varphi_{12} = 0.96;$$

$$\varphi_{13} = \varphi_1 + 2 \cdot \Delta \cdot N_5 = \varphi_1; \varphi_{14} = \varphi_2; \varphi_{15} = \varphi_2 + 2 \cdot \Delta \cdot N_{15} = \varphi_2 - 7.68; \varphi_{16} = \varphi_4 - 7.68;$$

$$\varphi_{17} = \varphi_4 + 2 \cdot \Delta \cdot N_{11} = \varphi_4; \varphi_{18} = \varphi_3.$$

По симметрии:

$$\varphi_{19} = \varphi_4; \varphi_{20} = \varphi_2; \varphi_{21} = \varphi_8 = 0; \varphi_{22} = \varphi_9 = 0; \varphi_{23} = \varphi_6 = 3.84; \varphi_{24} = \varphi_{11} = 0.96.$$

3. Подставим значения φ в систему (1):

$$20 \cdot \varphi_1 - 8 \cdot (\varphi_2 + \varphi_2 + 5.973 + \varphi_3) + 2 \cdot (3.84 + 3.84 + \varphi_4 + \varphi_4) + 0.96 + \varphi_1 + 0 + 0 = 0,$$

$$21 \cdot \varphi_1 - 16 \cdot \varphi_2 - 8 \cdot \varphi_3 + 4 \cdot \varphi_4 = 31.464.$$

$$20 \cdot \varphi_2 - 8 \cdot (3.84 + 0 + \varphi_4 + \varphi_1) + 2 \cdot (5.973 + 0 + 0 + \varphi_3) + 0.96 + \varphi_2 + \varphi_2 + \varphi_2 - 7.68 = 0,$$

$$-8 \cdot \varphi_1 + 23 \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \varphi_3 - 8 \cdot \varphi_4 = 25.494.$$

$$20 \cdot \varphi_3 - 8 \cdot (\varphi_1 + \varphi_4 + 0.96 + \varphi_4) + 2 \cdot (\varphi_2 + 0.96 + 0.96 + \varphi_2) + 5.973 + 0 + \varphi_3 + 0 = 0,$$

$$-8 \cdot \varphi_1 + 4 \cdot \varphi_2 + 21 \cdot \varphi_3 - 16 \cdot \varphi_4 = -2.133.$$

$$20 \cdot \varphi_4 - 8 \cdot (\varphi_2 + 0 + 0.96 + \varphi_3) + 2 \cdot (\varphi_1 + 0 + 0 + 0.96) + 3.84 + \varphi_4 - 7.68 + \varphi_4 + \varphi_4 = 0,$$

$$2 \cdot \varphi_1 - 8 \cdot \varphi_2 - 8 \cdot \varphi_3 + 23 \cdot \varphi_4 = 9.6.$$

Окончательно в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 21 & -16 & -8 & 4 \\ -8 & 23 & 2 & -8 \\ -8 & 4 & 21 & -16 \\ 2 & -8 & -8 & 23 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31.464 \\ 25.494 \\ -2.133 \\ 9.6 \end{pmatrix}; \quad (2)$$

Решение системы (2):

$$\varphi_1 = 4.473 \text{ МН}; \varphi_2 = 3.140 \text{ МН}; \varphi_3 = 2.528 \text{ МН}; \varphi_4 = 2 \text{ МН}.$$

4. Рассмотрим равновесие балки-стенки:

Касательные напряжения на оси симметрии равны нулю.

Найдём напряжения σ_x в т. 5, 1, 3, 12:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \approx \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \boxed{-2} \\ \textcircled{1} \end{matrix} \cdot \frac{1}{\Delta^2}$$

$$\sigma_{x(i)} = \frac{d^2 \varphi_{ij}}{dy^2} \approx \frac{\varphi_{ij-1} - 2 \cdot \varphi_{ij} + \varphi_{ij+1}}{\Delta^2};$$

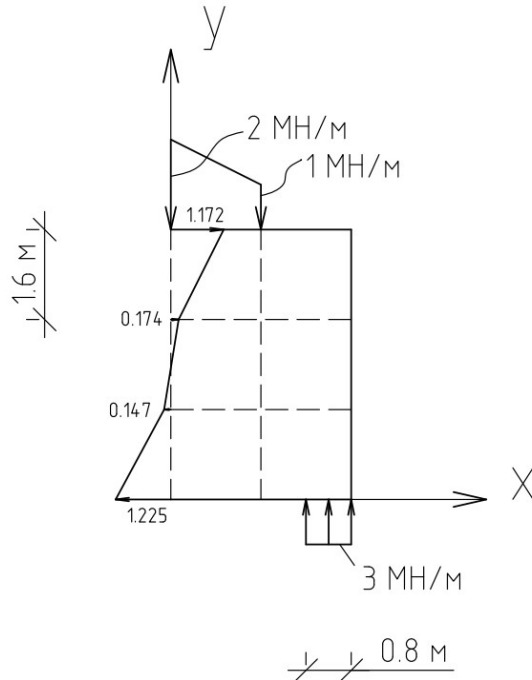
					ВГТУ	СУЗ-211	Лист
Изм.	Лист	№ док.	Подп.	Дата			6

$$\sigma_x^{(5)} = \frac{\varphi_{13} - 2 \cdot \varphi_5 + \varphi_1}{\Delta^2} = \frac{2 \cdot 4.473 - 2 \cdot 5.973}{2.56} = -1.172 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{\varphi_5 - 2 \cdot \varphi_1 + \varphi_3}{\Delta^2} = \frac{5.973 - 2 \cdot 4.473 + 2.528}{2.56} = -0.174 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x^{(3)} = \frac{\varphi_1 - 2 \cdot \varphi_3 + \varphi_{12}}{\Delta^2} = \frac{4.473 - 2 \cdot 2.528 + 0.96}{2.56} = 0.147 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x^{(12)} = \frac{\varphi_3 - 2 \cdot \varphi_{12} + \varphi_{18}}{\Delta^2} = \frac{2.528 - 2 \cdot 0.96 + 2.528}{2.56} = 1.225 \text{ МПа}.$$



$$\sum y = 0 - \text{верно}; -(2 + 1) \cdot 1.6 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 0.8 = 0$$

$$\sum x = 0; \frac{1.172 + 0.174}{2} \cdot 1.6 + \frac{0.174 - 0.147}{2} \cdot 1.6 - \frac{0.147 + 1.225}{2} \cdot 1.6 = 1.077 + 0.022 - 1.098;$$

$$0.001 \equiv 0 - \text{верно}.$$

5. Рассмотрим равновесие следующей части балки-стенки:

Касательные напряжения должны равняться нулю:

AD – ось симметрии; BC – свободная сторона

Найдём напряжения σ_y в т. 1, 2, 8:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \approx \textcircled{1} - \textcircled{-2} - \textcircled{1} \times \frac{1}{\Delta^2}$$

$$\sigma_y^{(1)} = (\varphi_{20} - 2 \cdot \varphi_1 + \varphi_2) \cdot \frac{1}{\Delta^2} = \frac{3.140 - 2 \cdot 4.473 + 3.140}{2.56} = -1.041 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^{(2)} = (\varphi_1 - 2 \cdot \varphi_2 + \varphi_8) \cdot \frac{1}{\Delta^2} = \frac{4.473 - 2 \cdot 3.140 + 0}{2.56} = -0.706 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^{(8)} = (\varphi_2 - 2 \cdot \varphi_8 + \varphi_{15}) \cdot \frac{1}{\Delta^2} = \frac{3.140 - 2 \cdot 0 + 3.140 - 7.68}{2.56} = -0.547 \text{ МПа};$$

$$\sum y = 0;$$

$$-(2 + 1) \cdot 1.6 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1.041 + 0.706}{2} \cdot 1.6 + \frac{0.706 + 0.547}{2} \cdot 1.6 = -2.4 + 1.398 + 1.002 = 0;$$

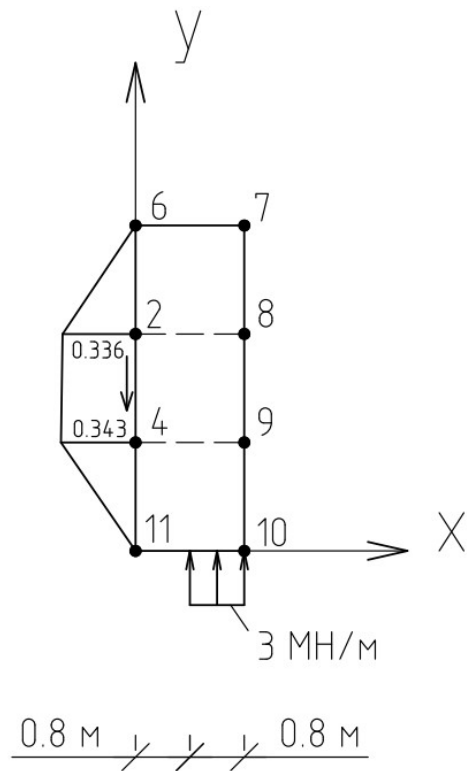
$$0 \equiv 0 - \text{верно}.$$

					ВГТУ	СУЗ-211	Лист
Изм.	Лист	№ док.	Подп.	Дата			7

					ВГТУ СУЗ-211	Лист
Изм.	Лист	№ док.	Подп.	Дата		8

$$3 \cdot 0.8 - 0.336 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.6 - \frac{0.336 + 0.343}{2} \cdot 1.6 - 0.343 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.6 =$$

$$= 2.4 - 0.269 - 0.543 - 0.274 = 1.314 \neq 0.$$



					ВГТУ	СУЗ-211	Лист
Изм.	Лист	№ док.	Подп.	Дата			9